UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIELA ALVES DIAS

Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA

MARÇO DE 2016

GABRIELA ALVES DIAS

Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações

Monografia apresentada ao curso de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB como requisito para obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Orientador: Antônio Augusto Oliveira Lima

Vitória da Conquista

2016

GABRIELA ALVES DIAS

Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações

Monografia apresentada ao curso de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB como requisito para obtenção do grau de licenciado em Matemática

BANCA EXAMINADORA

____

Antônio Augusto Oliveira Lima

____

Júlio César dos Reis

____

Wallace Juan Teixeira Cunha

"O começo de todas as ciências é o espanto de as coisas serem o que são."

Aristóteles

AGRADECIMENTOS

Durante toda esta caminhada pude contar com a ajuda de muitas pessoas queridas, e é a todas elas que agradeço neste momento.

Em primeiro lugar, a Deus que percorre este caminho como meu guia e, em segundo lugar, à minha família, que foi essencial em todos os momentos. Meus pais como sempre me apoiando, e a minha irmã sempre disposta a ajudar.

Aos mestres todo o meu carinho, afinal, sem os mesmos meus sonhos não seriam realizados, e renovados a cada dia.

Muito obrigada a todos!

RESUMO

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: a primeira parte foi dedicada à história do cálculo, com enfoque nas discussões entre Isaac Newton e Gottfried Leibnz, numa fase conhecida como a Guerra do Cálculo. Logo em seguida tem-se uma exposição teórica do Cálculo Diferencial e Integral, onde cada capítulo apresenta seu conteúdo, como o cálculo de limites, derivadas e integrais, e, ao final de cada um, as possíveis aplicações correspondentes.
Palavras chave: Cálculo, limite, derivada, integral, aplicações.

ABSTRACT

This work is organized as follows: the first part is dedicated to the history of calculus, focusing on discussions between Isaac Newton and Gottfried Leibnz during a period known as the Calculus War. Then a theoretical display of Differential and Integral Calculus, where each chapter presents content such as calculating limits, derivatives and integrals. And at the end of each chapter, possible corresponding applications.

Keywords: calculation , limit, derivative, integral, applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por finalidade apresentar o cálculo diferencial e integral de uma forma mais, digamos assim, palpável ao olhar dos alunos. O professor de matemática sempre se vê diante a questionamentos como: “Onde eu vou utilizar isso? No que isto me será útil?”. Se tivermos uma base melhor com relação às aplicações, poderemos responder à altura alguns questionamento desta natureza.

O primeiro capítulo apresenta uma breve explanação acerca dos acontecimentos envolvendo Isaac Newton e Gottfried Leibnz, cujas discussões ficaram marcadas por décadas, onde cada um defendia suas ideias e, com isso, puderam contribuir com o cálculo da forma como é visto hoje.

Os capítulos subsequentes apresentam as definições do Limite, do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral, abordando suas particularidades e propriedades, com exemplos para que fique mais claro compreender cada contéudo.

Ao final de cada capítulo são apresentadas algumas aplicações referente ao seu respectivo conteúdo, como o Limite nas curvas de logística, a Derivada na física e na biologia, e a Integral aplicada à economia e engenharia.

Com as aplicações mostraremos que o Cálculo Diferencial e Integral é uma ferramenta que não é exclusiva da matemática, como alguns pensam, e sim, uma ferramenta poderosa em muitos ramos acadêmicos que nos proponhamos a seguir.

Capítulo 1
Aspectos Históricos: A Guerra do Cálculo

O cálculo sempre se mostrou como uma das técnicas mais poderosas da matemática, sendo estudada pelos mais variados filósofos dos séculos passados. Porém foi no Século XVII que o Cálculo começou a dar seus primeiros passos.

Ainda hoje é possível encontrar muitas controvérsias a respeito do descobrimento do Cálculo Diferencial e Integral. Porém, para que este trabalho não prolongue por anos e anos de histórias acerca de diversas discussões, o foco ficará na maior delas, na que ficou conhecida como A Guerra do Cálculo.

Para que entendamos o contexto é necessário voltar um pouco no tempo, mais precisamente para os anos mais criativos de Isaac Newton (1642-1726), que iniciaram-se em 1665, quando o mesmo era um jovem estudante da Universidade de Cambridge. Newton, recluso em sua propriedade rural, passou dois anos realizando experiências e refletindo sobre as leis da física que regiam o mundo, e foi neste exato período que, entre tantas outras descobertas, Newton descobriu o Cálculo e o chamou de "Método de fluxos e fluentes" porém, após tantas realizações, ele tomou a decisão de guardar seus conhecimentos para si, e nada publicara a respeito durante anos, apenas alguns textos privados foram divulgados entre seus amigos.

Gottfried Leibnz (1646-1716) firmou seus estudos no Cálculo dez anos após os trabalhos de Isaac, quando estava na França, e durante dez anos pôde aperfeiçoar seus trabalhos. Suas descobertas eram detalhadas e possuíam uma linguagem específica cheia de novos símbolos, linguagens e representações gráficas. Ao contrário de Newton, Leibnz publicou todo o seu sistema de cálculo em dois trabalhos datados de 1684 e 1686. Com isso, Leibnz reivindicou seus direitos intitulando-se como o inventor do Cálculo, o que fez com que ficasse reconhecido, por anos, como o maior matemático vivo.

Newton acreditava que Leibnz, ao fazer uma visita à Londres em 1673, havia estudado um de seus trabalhos, e que o mesmo o teria influenciado em suas descobertas, o que foi suficiente para que Leibnz fosse chamado de ladrão. Isaac, como era o homem muito influente e importante no cenário acadêmico, contratou várias pessoas para publicar artigos denegrindo a imagem de seu rival, porém Gottfried não iria deixar as ofensas sem respostas. E, assim, uma guerra começou.

Foram anos de trocas de ofensas, tanto em segredo quanto abertamente, ambos conseguiram convencer colegas pensadores a juntar-se nessa disputa, e, por muito tempo, a Europa se viu dividida entre Newton e Leibnz. Para se ter uma ideia da dimensão do ocorrido, com tantos artigos publicados, cada vez mais fervorosos, diante da raiva que aumentava a cada ofensa lida, o Guerra do Cálculo chegou ao mais alto escalão do governo Europeu, ao Rei da Inglaterra.

Após adoecer e ficar em sua cama por, aproximadamente, quatro meses, Gottfried Leibnz faleceu em novembro de 1716 na Alemanha, sua terra natal. Mesmo com sua morte, Isaac Newton continuou a publicar artigos em sua defesa, e conseguiu o respeito e a certeza de todos de que havia descoberto o Cálculo antes de Leibnz. Após sua morte, em 1727, toda a Inglaterra acreditava na veracidade de seus documentos e atribuíam a ele a descoberta.

O fato é que Isaac Newton havia descoberto o Cálculo dez anos antes que Gottfried Leibnz, porém Leibnz desenvolveu seus cálculos mais do que Newton, utilizou de uma linguagem específica, para que todos pudessem compreender e utilizar, o que é feito até os dias atuais.

Esta guerra apenas mostrou o quão humano dois magníficos matemáticos, um britânico e um alemão, poderiam ser. Uma disputa de apropriação intelectual, alicerçada no orgulho e ambição de cada um. Mas o mais importante perpetua-se até os dias atuais, o conhecimento deixado por ambos.

Capítulo 2

Limite

2.1. Definição:

Escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Onde lê-se “O limite de f(x), quando x tende à a, é igual a L”.

Podemos entender que, quanto mais próximo for o valor de x, ao valor de a, mais os valores da função f(x) se aproximam de L.

Ainda assim, podemos escrever a definição de limite de uma forma concisa e completa, onde, seja uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto o próprio a. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{Se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

2.2. Propriedades de Limite:

Vamos considerar como sendo c uma constante e existentes os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x)$$

2.1.1. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2.1.2. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

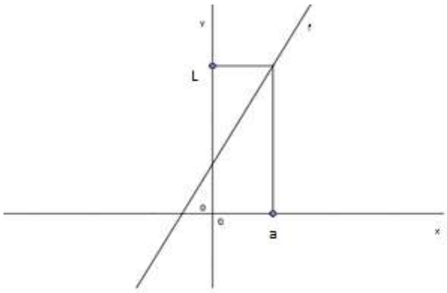
2.1.3. $\lim_{x \to a}[cf(x)] = \text{c} \lim_{x \to a} f(x)$

2.1.4. $\lim_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$

2.1.5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

2.3. O limite de uma função:

Vamos observar o comportamento da seguinte função: $f(x) = 2x + 1$



(Figura 1)

Fica claro, ao observarmos o gráfico da função f, onde a cada vez que os valores de x se aproximam de a, os valores de y se aproximam de L.

Vale notar, que esta aproximação pode acontecer por ambos os lados, ou seja, tanto pela direita, quanto pela esquerda. O que nos leva a conclusão que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

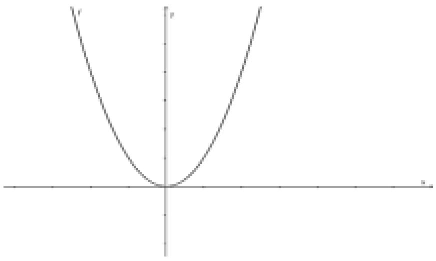
se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Isso quer dizer que, o limite da função f , quando x se aproxima de a pela esquerda, ou pela direita, será igual a L.

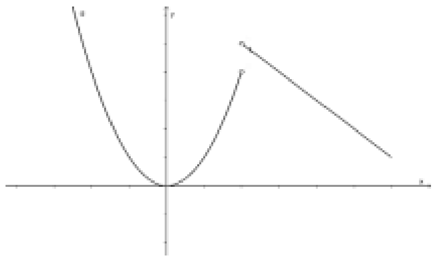
2.4. Continuidade:

No Ensino médio é comum ouvir que para descobrirmos se uma função é contínua basta esboçar seu gráfico e verificar se o mesmo não possui interrupções, ou, a grosso modo, verificar se durante a construção do gráfico da função não retiramos o lápis do papel. Como nos dois casos



(Figura 2)

$f(x) = x^2$



(Figura 3)

$$\begin{cases} Para\ x < 2; f(x) = x^2 \\ Para\ x \geq 2; f(x) = -x + 7 \end{cases}$$

Porém, como a definição de limite de função já nos foi dada, então podemos verificar o limite da função da figura 3. Observe que a função não possui valor para $x = 2$, porém o mais importante a ser observado é o fato que se aproximarmos a função do número 2 pela direita, o limite será diferente caso esta aproximação seja feita pela esquerda, ou seja, seus limites laterais são diferentes o que implica em $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$.

Para que uma função seja contínua, todos os seus pontos precisam pertencer ao domínio da função, e o limite da função precisa existir.

Uma função é contínua em um ponto a, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemplo: Verifique onde a seguinte função é descontínua

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

Solução: Observe que a função não possui nenhuma restrição, ou seja, se adotarmos $x = 2$, a função f não possuiria valor, já que substituindo teríamos:

$$f(2) = \frac{2^2 - 3(2) + 2}{2 - 2}$$

$$f(2) = \frac{4 - 6 + 2}{0}$$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $a = 2$. Porém, a função $f(x)$ também pode ser escrita da seguinte forma $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = x - 1$ onde teremos:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Ainda podemos encontrar situações onde a função é contínua a direita ou a esquerda de um número a. Onde teremos duas situações:

A função f será contínua a direita de um número a quando

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

A função f será contínua a esquerda de um número $a\ quando$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

E, ainda, a função também pode ser contínua em um dado intervalo, se ela for contínua em todos os pontos contidos neste intervalo.

2.5. Limites no infinito

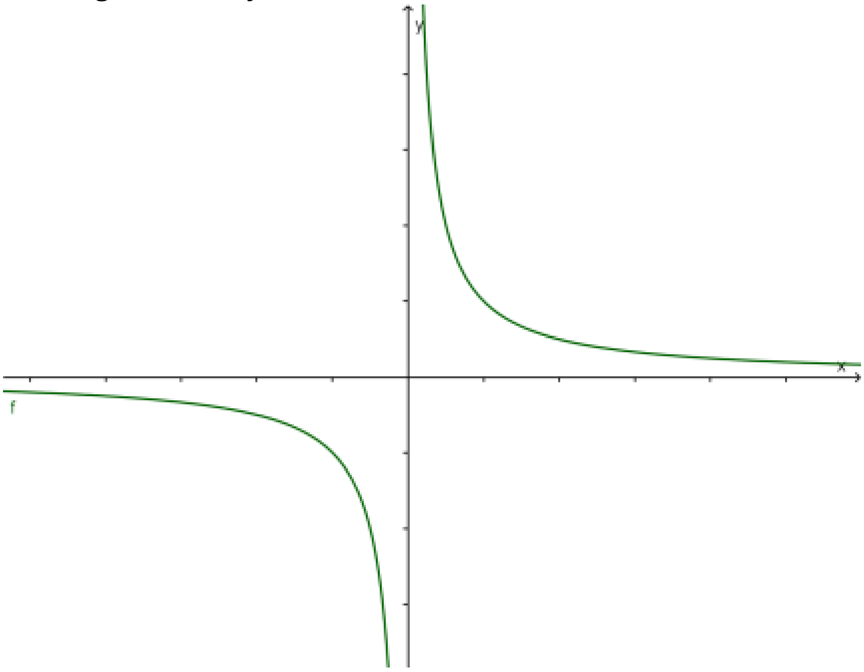
Seja f uma função definida no intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Quer dizer que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L, tomando x suficientemente grande.

O símbolo ∞ não representa um número, portanto não se efetuam com ele as operações que realizamos com os números reais.

Vamos observar a seguinte situação



(Figura 4)

Ao analisarmos a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é possível perceber que quanto maior for o valor de x, mais próxima estará a função de 0. Isso é valido também para o inverso. Ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Bem como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

2.6. Aplicações do Limite

2.6.1. Curvas de Logística

São vários os fatores que interferem no crescimento populacional, como, por exemplo, o aparecimento de epidemias. Pensando nisso, foram criadas as curvas de logística para serem usadas na definição de modelos de crescimento populacional quando fatores ambientais impõem restrições ao tamanho possível da população.

Vamos verificar a seguinte situação hipotética.

Foi constatada uma epidemia de uma nova forma de gripe numa dada população e, após t semanas o número N de pessoas contaminadas (em milhares) é aproximadamente

$$N = \frac{20}{1 + 19.10^{-0,5t}}$$

De acordo com esta estimativa é possível determinar o número de pessoas contaminadas passadas 4 semanas após a constatação da doença.

$$\lim_{t \to 4} N(t) = \lim_{t \to 4} \frac{20}{1 + 19.10^{-0,5t}}$$

$$\lim_{t \to 4} N(t) = \frac{20}{1 + 19.10^{-2}}$$

$$\lim_{t \to 4} N(t) = \frac{20}{1 + 19.10^{-2}}$$

$$\lim_{t \to 4} N(t) = \frac{20}{1 + 0,19} = \frac{20}{1,19} \cong 16,800$$

Podemos também encontrar o número de pessoas que haviam contraído a doença quando foi constada a gripe.

$$\lim_{t \to 0} N(t) = \frac{20}{1 + 19.10^{-0,5t}}$$

$$\lim_{t \to 0} N(t) = \frac{20}{1 + 19.10^{0}}$$

$$\lim_{t \to 0} N(t) = \frac{20}{1 + 19} = \frac{20}{20} = 1$$

Como estávamos calculando em milhares, então, seriam aproximadamente 16800 pessoas infectadas no decorrer de 4 semanas e 1000 pessoas infectadas quando foi detectada a gripe.

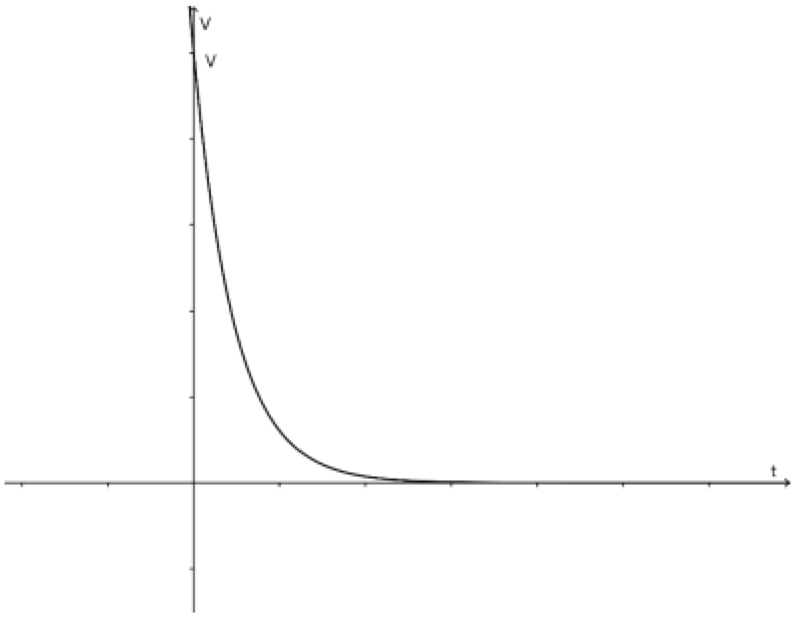
2.6.2. Comportamento de funções

O estudo do limite é vastamente utilizado para estudar o comportamento de uma função. Ou seja, toda e qualquer situação que envolva uma função, pode ter seus resultados apresentados através do limite.

Vamos observar algumas situações hipotéticas.

Situação1: A água de um reservatório com 100 000 litros evapora-se à taxa de 10% ao mês. O que acontecerá com a água ao longo do tempo? Qual será o volume de água limite?

O volume da água será expresso pela função $V = 100000.(0{,}9)^t$, cujo gráfico será representado abaixo.



(Figura 5)

No decorrer do tempo, isto é, quando t tende ao infinito, teremos:

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty} 100000.(0{,}9)^t$$

$$\lim_{t\to\infty} 100000 \, . \lim_{t\to\infty}(0{,}9)^t$$

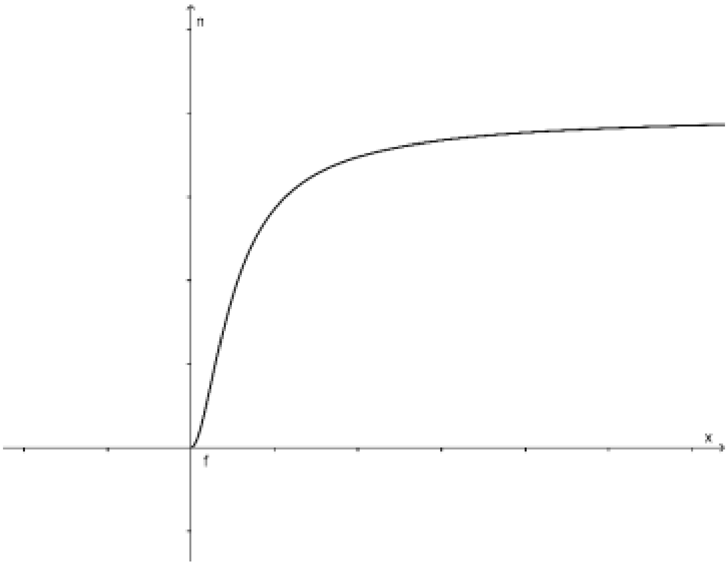
$$100000 \cdot 0 = 0$$

Ou seja, o volume de água acabará com o tempo.

Situação 2: Uma montadora de computadores determina que um empregado após x dias de treinamento, monta n computadores por dia, onde:

$$n(x) = \frac{20x^2}{x^2 + x + 5}$$

O que acontece com x após treinamentos longos?



(Figura 6)

$$\lim_{x\to\infty} n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{20x^2}{x^2 + x + 5} = 20$$

Ou seja, após um longo treinamento o empregado montará 20 computadores por dia.

Capítulo 3

Cálculo Diferencial

O desenvolvimento do cálculo diferencial está ligado às questões de tangente à uma curva. A utilização de símbolos algébricos no estudo do cálculo contribuiu para o desenvolvimento da Derivada. Tendo Newton desenvolvido seus cálculos através de seus estudos sobre Fluidos, Leibniz pensava em derivada como grandeza.

3.1. Definição:

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se o limite existir.

Podemos também escrever $x = a + h$, sendo assim, $h = x - a$. Reescrevendo a função temos:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tomemos a função $f(x) = 3x^2 + x - 2$ como exemplo. Vamos encontrar a derivada da função $f(x)$ no ponto a.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(a+h)^2 + (a+h) - 2] - [3(a)^2 + a - 2]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3a^2 + 6ah + h^2 + a + h - 2] - [3a^2 + a - 2]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + a + h - 2 - 3a^2 - a + 2}{h0}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{6ah + 3h^2 + h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 6a + 3h + 1 = 6a + 1$$

Tratando a derivada como uma forma geométrica, temos que a derivada da função f em x_0, é a inclinação da reta r, tangente ao gráfico de f em P_0.

Ou melhor dizendo, uma reta tangente à função f, em $(a, f(a))$, é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a derivada de f em a, ou $f'(a)$.

3.2. Regras de Derivação:

Uma função é dita diferenciável em a, se $f'(a)$ existir. O que é válido dizer, que f é diferenciável no intervalo aberto (a, b), se for diferenciável em cada valor desse intervalo. Para estudarmos as regras de derivação, vamos considerar que a derivada de uma função f, em x, é representada por f' ou $\frac{df}{dx}$.

3.2.1. Derivada de uma constante:

A função constante $f(x) = c$ possui o gráfico como sendo uma reta paralela ao eixo x, com $y = c$. Sendo assim, a taxa de inclinação é zero. De onde concluímos que,

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

3.2.2. Derivada de uma potência:

Sendo n um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, temos que

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

De onde podemos concluir que a derivada da função x é igual a 1, pois

$$f'(x) = 1.x^{1-1}$$

$$f'(x) = 1$$

3.2.3. Derivada de um produto:

Sejam f e g duas funções diferenciáveis, a derivada do produto $f.g$ será expressa por

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3.2.4. Derivada de um quociente:

Sejam f e g duas funções diferenciáveis, e $g(x) \neq 0$, a derivada do quociente $\frac{f}{g}$ será expressa por

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

3.3. Regra da Cadeia:

A regra da Cadeia é utilizada para o cálculo da derivada de uma função composta. Imaginemos a composição $f\,^\circ g$, para calcularmos a sua derivada é necessário que ambas sejam diferenciáveis, e suas derivadas sejam conhecidas, para que assim, apliquemos, de fato, a Regra da Cadeia, que nada mais é que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Para que fique mais claro, vamos observar a seguinte função $y = (x^2 + 1)^7$, então tomemos $u = x^2 + 1$ e $y = u^7$.

Calculando as derivadas temos:

$$\frac{du}{dx} = 2x \text{ e } \frac{dy}{du} = 7u^6$$

Aplicando a regra, temos:

$$\frac{dy}{dx} = 7u^6.2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 7(x^2 + 1)^6.2x$$

Então, fica claro observarmos que se f e g forem diferenciáveis e se F for a função composta definida por $f(g(x))$, então F também será diferenciável e definida pelo produto

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

Exemplo: Calcule a derivada da função $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Temos $u = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{u}$

Determinando suas respectivas derivadas, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \text{ e } \frac{du}{dx} = 2x$$

Aplicando a Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \,.\, 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \,.\, 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

3.4. Aplicações do Cálculo Diferencial

3.4.1. Aplicações na física

O cálculo diferencial é largamente utilizado na física, mas iniciaremos aqui com exemplos mais básicos de aplicações.

Imagine uma partícula cuja função deslocamento é expressa por $F(t) = 1{,}6t^3 + 3{,}2t - 1{,}8$, onde t é o tempo medido em segundos e a distância em metros.

Bom, primeiro precisamos de uma informação. A derivada $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$, em relação a x, quando $x = a$. Sabendo disso, podemos então encontrar a taxa de variação da função $F(t)$, onde a mesma representará a velocidade da partícula. Ou seja, a taxa de variação do deslocamento, será a velocidade da partícula naquele instante. Então se derivarmos a função deslocamento, encontraremos a função velocidade. Observe

$$F(t) = 1{,}6t^3 + 3{,}2t - 1{,}8$$

$$F'(t) = 3(1{,}6t^2) + 3{,}2 - 0$$

$$F'(t) = 4{,}8t^2 + 3{,}2$$

Com a função $F'(t)$, podemos agora determinar a velocidade da partícula em qualquer instante t.

Seguindo com taxa de variação, se derivarmos a função velocidade, encontraremos função aceleração da partícula. Ou seja, a taxa de variação da velocidade é a aceleração. Então continuando com este mesmo exemplo, se quisermos encontrar a aceleração da partícula num instante, devemos, primeiro, encontrar a derivada da função velocidade.

$$F'(t) = 4{,}8t^2 + 3{,}2$$

$$F''(t) = 2(4{,}8t) + 0$$

$$F''(t) = 9{,}6t$$

3.4.2. Crescimento bacteriano

O estudo do crescimento de bactérias pode ser uma tarefa árdua, já que uma única bactéria se dividi formando uma nova bactéria, que se divide formando uma outra e por aí vai. Ou seja, é um crescimento exponencial. Porém, esse crescimento vai depender do tempo que uma bactéria vai demorar para se dividir e criar uma nova.

Podemos perceber que conforme a quantidade de bactérias aumenta, a sua velocidade em se duplicar também, por exemplo, se a quantidade de bactérias triplicar, a velocidade de crescimento triplicará também.

Seja $Q(x)$ a função que determina a quantidade de bactérias em função do tempo. A taxa de variação de crescimento será, então

$$\frac{dQ}{dt} = kq$$

Onde o k será o quanto cada bactéria contribui para o crescimento da população.

Aplicando algumas regras de derivação e integração chegaremos na função

$$Q(t) = Q_0.e^{kt}$$

Vamos supor que uma determinada bactéria se duplique a cada uma hora, num determinado ambiente. Se a população inicial for de 10 bactérias, e o tempo t for medido em horas, então a quantidade de bactérias em qualquer instante t será expressa pela equação

$$Q(t) = 10e^{kt}$$

Seguindo esse exemplo, suponhamos que após 1 hora, o número de bactérias passou a ser 20. Ou seja, $Q(1) = 20$. Substituindo esses valores na equação $Q(t)$, teremos

$$10e^k = 20 \quad \to \quad e^k = 2 \quad \to \quad k = \ln 2 \quad \to \quad k \cong 0{,}693$$

Ao encontrarmos o valor da contribuição de crescimento, podemos então encontrar a taxa de crescimento das bactérias em qualquer instante t, vamos encontrar para $t = 8$. Teremos então

$$Q(8) = 10e^{0{,}693.8} \quad \to \quad 10e^{5{,}544}$$

$$Q(8) \cong 2556{,}98$$

3.4.3. Massa de um foguete

Todos os anos dezenas de foguetes são lançados na atmosfera, é um mercado que movimenta cerca de 25 bilhões de dólares por ano, um custo altíssimo, mas que vale a pena devido as descobertas encontradas a cada dia. Mas o fato é que, com um investimento tão grande, não é de se estranhar que os foguetes lançados sejam monitorados a todo instante, e cada detalhe seja minuciosamente analisado. Todos os países que trabalham com o lançamento de foguetes tem seus modelos e tecnologias, até mesmo o Brasil. Porém, independente do modelo, o foguete, após ser lançado, tem sua massa variando constantemente, e isso se deve a queima do combustível do mesmo. Ou seja, quanto maior a queima de combustível, menor será a massa do Foguete. Temos então uma variação da massa em relação ao tempo. Ao chamarmos a massa de m, e o tempo de t, temos que a taxa de variação da massa do foguete será expressa por

$$R = \frac{dm}{dt}$$

Onde R é a taxa de variação da massa do foguete. Sendo m_0 a massa inicial do foguete, então no instante t a massa será definida por

$$m(t) = m_0 - Rt$$

A massa do foguete irá interferir na velocidade do foguete num instante t. Essa mesma situação pode ser notada também em carros de fórmula 1, aviação, entre outros.

Capítulo 4

Cálculo Integral

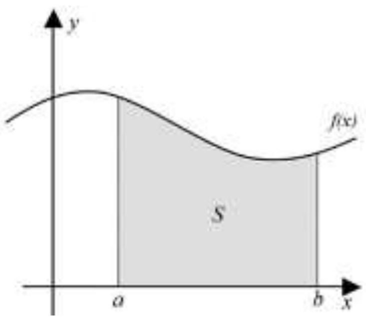
Ao pensar em Cálculo Integral, logo nos vem à cabeça a palavra Quadratura, isso vem de um passado onde os geômetras usavam o quadrado para calcular as áreas de figuras planas, pois essa era figura mais simples para ser usada. Então a palavra Quadratura passou a tornar-se sinônimo da determinação de áreas.

4.1. Definição:

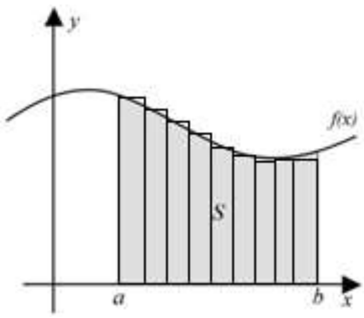
Na matemática tudo possui o seu inverso, como por exemplo, a subtração como inverso da adição, divisão como inverso da multiplicação, entre outros. No cálculo diferencial temos também o inverso da derivada que é a antiderivada, ou como chamaremos, integral. Logo F será a antiderivada de f, num dado intervalo I, se $F'(x) = f(x)$ para todo x pertencente ao intervalo I.

4.2. Integral Definida

Estamos acostumados a calcular área de figuras planas com lados retos. Onde sempre conseguiremos reduzir a figura a algo menor e mais conhecido, porém essa não parece ser uma tarefa tão fácil quando a figura em questão possui lados curvos. Como na figura abaixo.



(Figura 7)



(Figura 8)

Então para calcularmos a área S, que está sob o gráfico de uma função contínua f, e delimitada pelas retas verticais a e b, consideraremos todos os retângulos aproximantes, como os mostrados na figura 8, que estão abaixo da curva. Sendo assim

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

Dizer que uma integral é definida é o mesmo que dizer que ela está restrita a um intervalo definido $[a, b]$. Para ficar mais claro, vamos à definição.

Definição: Seja f uma função contínua definida por $a \leq x \leq b$, dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento, $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, seja x_k um valor pertencente ao k-ésimo intervalo, para k = 1, 2, 3,..., n, então a integral de f definida no intervalo $[a, b]$ será definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

4.3. Propriedades de Integração

4.3.1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

4.3.2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

4.3.3. $\int_a^b cdx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante;

4.3.4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4.3.5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, onde c é qualquer constante

4.3.6. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4.3.7. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x) = \int_a^b f(x)dx$

4.3.8. Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

4.3.9. Se $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

4.4. Teorema Fundamental do Cálculo:

Parte1:
Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, temos então a função φ definida como

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Contínua e diferenciável onde

$$\varphi'(x) = f(x)$$

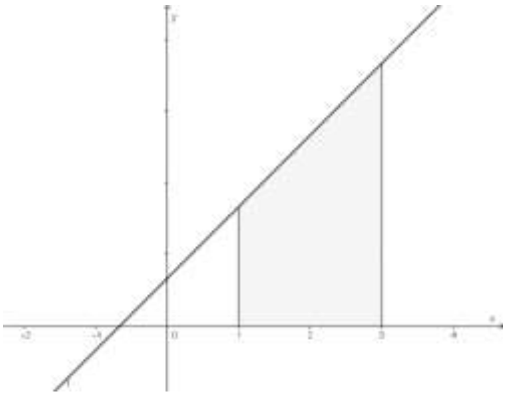
Parte 2:
Como consequência da parte 1, temos a segunda parte do teorema que fornece uma forma muito mais simples para o cálculo de Integrais
Se f for uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Onde F é uma antiderivada de f. Ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Exemplo: Use integração para encontrar a área da figura delimitada pelo eixo x e a função $f(x) = \frac{3x+2}{3}$, no intervalo [1,3].

Solução: Primeiro vamos observar a representação gráfica do problema



(Figura 9)

E então vamos calcular a integral que está definida no intervalo [1,3]

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^3 \frac{3x+2}{3}dx$$

$$\frac{1}{3}\int_1^3 (3x+2)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right)$$

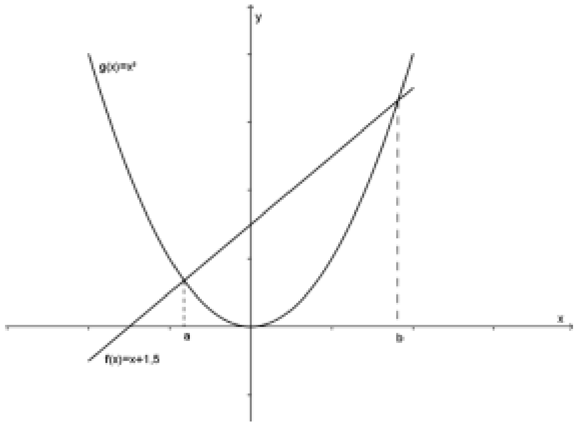
$$\frac{1}{3}\left[\frac{3(3)^2}{2} + 2(3)\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{3(1)^2}{2} + 2(1)\right]$$

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{27}{2} + 6\right) - \left(\frac{3}{2} + 2\right)\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{39}{2} - \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{32}{2} = \frac{16}{3}$$

Digite a equação aqui.

4.5. Área e Volume



(Figura 10)

Vimos no ítem 4.4. como calcular a área de uma região que está sob uma curva, porém, há situações em que a região em questão, está delimitada por duas curvas, como na figura 10. Suponha uma região S, que está limitada superiormente pela função f e inferiormente, pela função g, e está entre os pontos $x = a$ e $x = b$, temos que a área da região será definida por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Para encontrarmos o volume de um sólido, primeiro analisamos sua base, e depois encontramos sua altura. Suponha que a área da base de um sólido qualquer seja A e h seja sua altura, o volume deste sólido será expresso por

$$V = Ah$$

Mas para sólidos não familiares, digamos assim, o que iremos fazer é cortá-los em fatias, transversais à base, tão pequenas quanto queiramos e somá-las no final do processo.

Definição de Volume: Seja S um sólido que está entre os pontos $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo das abcissas, é $A(x)$, onde $A(x)$ é uma função contínua, então o volume será expresso por:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

4.6. Integral Indefinida:

O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite estabelecer uma relação entre o cálculo diferencial e integral. Sabendo que se f é uma função contínua, temos que $\int_a^b f(t)dt$ é antiderivada de f. Com isso podemos chegar a conclusão que

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ , então } F'(x) = f(x)$$

Ao estudarmos a integral definida vemos que a mesma é um número, o que não ocorre com a integral indefinida, onde a mesma é uma função. Vamos usar como exemplo a função $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 2$, a derivada de f será dada por $f'(x) = 12x^2 - 4x$, observe que a derivada da constante 2 é 0. Vamos agora integrar a função $f'(x)$, teremos:

$$\int (12x^2 - 4x)dx = \frac{12x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}$$

$$\int f'(x) = 4x^3 - 2x^2$$

É possível perceber que a constante da função $f(x)$ não pôde ser encontrada. Então ao trabalharmos com uma integral indefinida não podemos nos esquecer da constante presente na antiderivada, então chamaremos essa constante de C.

Para além de tratarmos a integral definida de função, na verdade a mesma pode ser considerada como sendo uma família de funções, pois as mesmas iriam variar conforme a constante C.

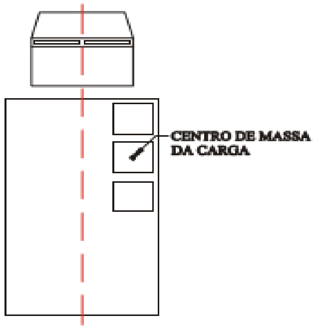
Então, na verdade, a integral da função f será expressa por

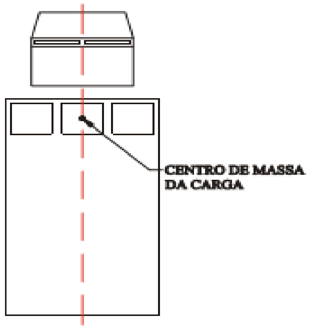
$$\int f'(x) = 4x^3 - 2x^2 + C$$

4.7. Aplicações do Cálculo Integral:

4.7.1. O centro de massa

No cotidiano, mesmo que não percebamos, encontramos situações envolvendo o centro de massa dos objetos. Ao arrumar a carga de um caminhão, por exemplo, a mesma precisa estar com o seu centro de massa alinhado com o eixo central do Caminhão, caso contrário, se for uma carga muito pesada, a mesma contribuirá para um possível acidente. Observe as duas situações abaixo:





(Figura 11) **(Figura 12)**

Na figura 11 temos um exemplo de uma carga mal distribuída, já na Figura 12 a carga está com o seu centro de massa sobre o eixo de alinhamento central do caminhão. Na primeira situação, se o motorista executar uma curva para a esquerda, a força centrífuga fará com que a carga saia de sua trajetória fazendo com o que o caminhão tombe para a esquerda.

Se temos uma região delimitada por duas curvas, o centroide desta região, ou o seu centro de massa terá sua coordenada expressa por:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

Para objetos com distribuição de massa homogênea, o seu centro de massa corresponderá ao seu centro de simetria. Porém, quando a distribuição da massa do corpo não for homogênea, o seu centro de massa dependerá da densidade do corpo em questão e do seu momento de massa.

Vamos considerar como k sendo a densidade do corpo, e (M_x, M_y) o momento de massa, que será definido por:

Momento de massa em y:

$$M_y = k\int_a^b xf(x)dx$$

Momento de massa em x:

$$M_x = \frac{k}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

E a massa total M como sendo:

$$M = k\int_a^b f(x)dx$$

O centro de massa do corpo terá coordenada em $(\bar{x}, \bar{y})$, onde:

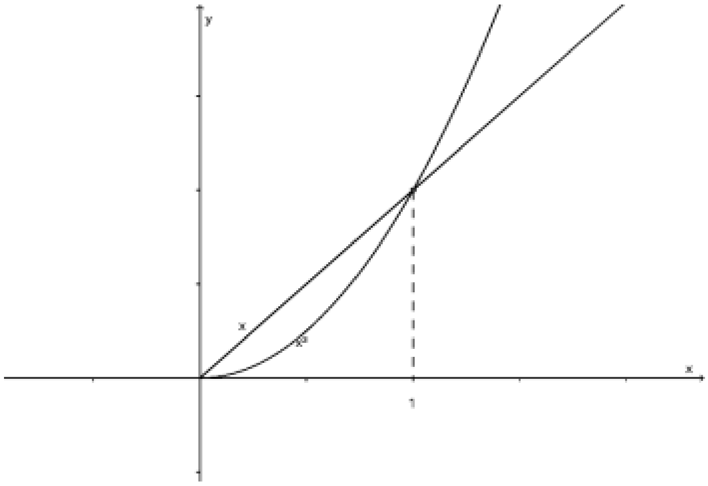
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

$$\bar{x} = \frac{k\int_a^b xf(x)dx}{k\int_a^b f(x)dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{k}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx}{k\int_a^b f(x)dx}$$

O cálculo do centro de massa é essencial, tanto para situações mais simples, como a fabricação de bandejas. Porém, na construção civil, por exemplo, saber o centro de massa dos projetos a serem desenvolvidos é de suma importância. Em lugares como Japão, terremotos acontecem com uma certa frequência, e os prédios precisam ser resistentes à situações como esta, pois uma força externa pode mudar o centro de massa de lugar, o provocaria o desequilíbrio de um edifício, para isso, os prédios são construídos com certos “artifícios” para manter este equilíbrio. Um exemplo disso, é o uso de um sistema de massa compensatória, que se movimenta na estrutura, para compensar a mudança do centro de massa.

Como exemplo, vamos encontrar o centro de massa da área delimitada pelos gráficos da função $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.



(Figura 13)

Primeiro devemos encontrar a área da figura, sabemos que a mesma é limitada superiormente pela função f e inferiormente pela função g. E compreendida no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Então agora basta montar a integral:

$$A = \int_0^1 |x - x^2|\, dx$$

$$A = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Vamos agora encontrar o centro de massa:

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{1}{6}} \int_0^1 x[x - x^2]dx = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)dx$$

$$\bar{x} = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) = 2x^3 - \frac{3x^4}{2}$$

$$\bar{x} = 2(1)^3 - \frac{3(1)^4}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2\frac{1}{6}} \int_0^1 [x^2 - (x^2)^2]dx = 3\int_0^1 (x^2 - x^4)dx$$

$$\bar{y} = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right) = x^3 - \frac{3x^5}{5}$$

$$\bar{y} = 1^3 - \frac{3(1)^5}{5} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

As coordenadas no centro de massa corresponde ao ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

4.7.2. Excedente do consumidor:

Imaginemos a seguinte situação hipotética, Carlos estava interessado em comprar um carro, porém, resolveu esperar mais um pouco na esperança de que o valor do carro pudesse diminuir e, assim, obter lucro na transação. E após 2 meses o valor do carro teve uma queda de 0,8% do seu valor inicial, Carlos não pensou duas vezes e adquiriu sem bem durável.

Veja bem, se engana quem pensa que Carlos obteve algum lucro com a compra do carro, apenas quem tem lucro, é quem produz e vende, o que não ocorre neste caso. Essa diferença que Carlos não pagou pelo produto, é chamado de excedente do consumidor.

As empresas costumam calcular o preço final de seus produtos através de uma relação entre a demanda e a procura. Então é necessário encontrar um equilíbrio entre as funções que expressam a procura e a demanda do produto.

Seja $p(x)$ a função que determina a demanda de um certo produto, x a quantidade de produtos e P o seu valor inicial. O excedente de consumo será expresso então por:

$$\int_0^x [p(x) - P]dx$$

Imagine um produto com valor de R$20,00 e que possui a função de demanda definida por $f(x) = 40 - 2x$. Podemos observar que para $y = 20$, temos

$$20 = 40 - 2x$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

Aplicando a fórmula de excedente teremos

$$\int_0^{10} (40 - 2x - 20)dx = \int_0^{10} (20 - 2x)dx$$

$$20x - x^2$$

Substituindo os limites de integração, temos:

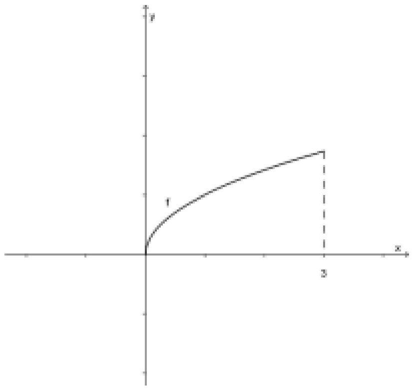
$$20(10) - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

O que entende-se que nesta situação, ao comprar 10 unidades do produto, o consumidor deixará de pagar 100,00 ao final da compra.

4.7.3. Aplicações do volume

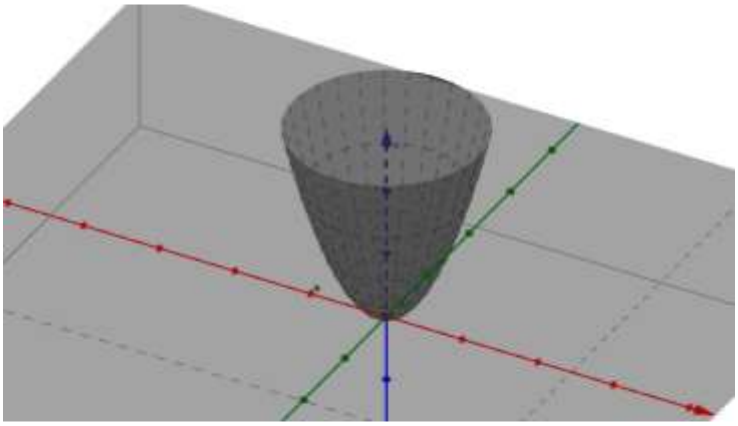
Quem está à mesa disposto a comer e tomar um belo copo de suco, nem imagina todo o processo pelo qual aquela bela jarra de suco passou antes chegar àquela mesa. Afinal de contas, são inúmeros modelos e tamanhos que encontramos no mercado. Alguém pensa num formato, o desenha e então precisa das proporções do objeto e, claro, o volume do mesmo.

Vamos pegar como exemplo a função $f(x) = \sqrt{x}$, com $0 \leq x \leq 3$.



(Figura 14)

A Figura 14 apresenta a representação gráfica da função f. Ao rotacionarmos a função em torno do eixo x, obteremos o sólido mostrado na Figura 15.



(Figura 15)

O mesmo, se for "cortado" transversalmente, com planos perpendiculares ao eixo x, nos dará uma circunferência de raio $\sqrt{x}$. Então a área de cada secção será $\pi[f(x)]^2$. Como o sólido foi obtido através da revolução em torno do eixo x, então seu volume será determinado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Logo, o volume do sólido em questão será

$$V = \pi \int_0^3 [\sqrt{x}]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^3 x dx = \pi \frac{x^2}{2}$$

$$V = \pi \left(\frac{3^2}{2} - 0 \right) = \frac{9\pi}{2} u.v.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando alguém se propõe a fazer um trabalho de conclusão de curso o tema deve ser algo prazeroso, e o meu não poderia ser diferente. Ao pesquisar sobre cada conteúdo, pude perceber o quão bela é a matemática. Aquela que não se restringe à sala de aula, aquela que contribui, mesmo que indiretamente, na vida de cada um, sem que saibamos.

Pude ampliar ainda mais meus horizontes, ao abordar uma parte da história do cálculo, algo que me pareceu extremamente interessante e que, ao meu ver, deveria ser abordado ainda no ensino médio, pois a curiosidade de cada um deve ser sempre estimulada.

As aplicações utilizadas foram todas apresentadas de modo que despertem o interesse do estudo em mais áreas, e que outros acadêmicos possam adquirir conhecimentos acerca das aplicações e levá-las para a sala de aula. Afinal, o curso de Licenciatura em Matemática está nos preparando para isso.

Enfim, posso dizer que este trabalho acrescentou saberes que levarei por toda a minha atuação acadêmica, e, claro, pesquisando cada vez mais. Pois a formação é algo contínuo, e esta graduação é apenas uma etapa de outras que ainda estão por vir.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

“Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)”.2009. Disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm>. Acesso em: 03/01/2016.

“Isaac Newton, Sir (1642-1727)”. 2009. Disponivel em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/newton.htm>. Acesso em: 03/01/2016.

“O nascimento do Cálculo”. 2009. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm>. Acesso em: 06/01/2016

BARDI, Jason Socrates, A Guerra do Cálculo [tradução Aluizio Pestana da Costa] – Rio de Janeiro: Record, 2008.

GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo. L T C. Vols. 1 e 2.

HOWARD, Anton. Cálculo um novo horizonte. Ed. Bookman. Vols 1 e 2.